Mathématiques pour la Physique et l'Ingénierie

Nicolas Laporte
Laboratoire d'Astrophysique de Marseille – nicolas.laporte@lam.fr

Logistique

- Partiel : 8 Avril (8h00-9h30)
- Examen : ?????

Date	
29/01/2024	CM – Chapitre 1
05/02/2024	CM – Chapitre 2
21/02/2024	TD 1
22/02/2024	TD 1 (suite)
26/02/2024	TD 2
29/02/2024	TD 2 (suite)
11/03/2024	TD 3
12/03/2024	TD 3 (suite)
18/03/2024	CM – Chapitre 3
19/03/2024	CM – Chapitre 4
25/03/2024	CM – Chapitre 5
26/03/2024	TD 4
02/04/2024	TD 4 (suite)
09/04/2024	TD5
16/04/2024	TD 5 (suite)

Aix*Marseille université
Socialement engagée

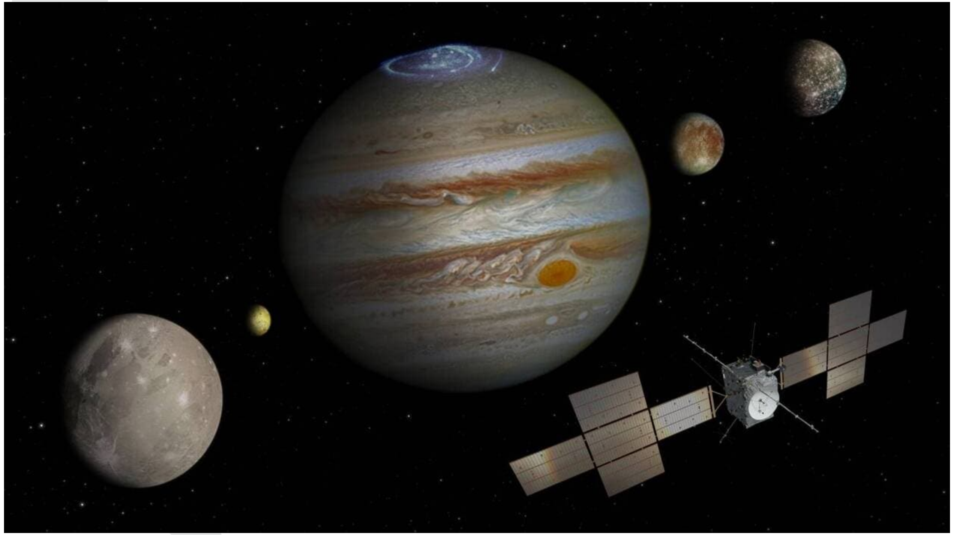
Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

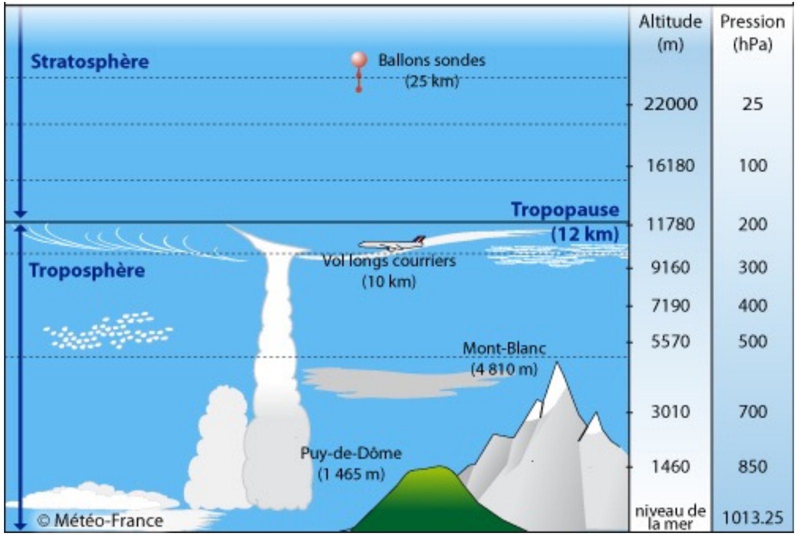
Contexte : problèmes et équations linéaires

En Physique et en Ingénierie, beaucoup de problème sont dits linéaires, c'est-à-dire qu'ils peuvent être exprimé sous forme de fonctions linéaires :

$$f(x) = ax + b = y$$

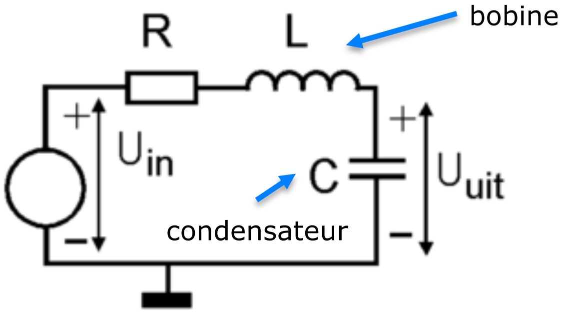
Linéaire = exposant de x est 1





Contexte : problèmes et équations linéaires

<u>Example en électricité</u>



- *Tension aux bornes de la resistance*

$$U = R \times I$$

si le courant est noté I_1 *alors*

$$U_1 = R \times I_1$$

si le courant est la somme de 2 courants :

$$U_{total} = R \times (I_1 + I_2) = R \times I_1 + R \times I_2$$

➔ *La tension aux bornes de la resistance est la somme des tensions obtenues avec les courants* I_1 *et* I_2

- *Influence du condensateur sur l'intensité électrique*

$$I = C \times \frac{dU}{dt}$$

Capacité du condensateur

Variation de la tension en fonction du temps

Contexte : problèmes et équations linéaires

Example en électricité (suite)

- *Influence du condensateur sur l'intensité électrique (suite)*

si on applique une tension $U = U_1 + U_2$ on obtient :

$$I = C\frac{dU}{dt} = C\frac{d(U_1 + U_2)}{dt} = C\frac{dU_1}{dt} + C\frac{dU_2}{dt} = I_1 + I_2$$

➔ *La variation de tension induite par le condensateur est bien la somme des variations de tensions obtenues avec les courants I_1 et I_2*

N.B: l'intensite I et la tension U peuvent avoir des formes très complexes, ce qui importe est que la relation qui relie ces deux grandeurs entre elles soit linéaire.

↳ c'est une des propriétés de la dérivation

$$(f + g)' = f' + g'$$
$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

Contexte : problèmes et équations linéaires

La resolution d'un problème linéaire implique que les équations qui permettent de le résoudre sont de la forme :

$$y = ax + cste$$

ou pour le cas à deux inconnues (x et z) :

$$y_1 = a_1x + b_1z + cste$$
$$y_2 = a_2x + b_2z + \mathrm{cste}$$

➔ Pour résoudre ce couple d'équations, il faudra faire des substitutions.

Pour un problème à 3 inconnues (x, z, p) :

$$y_1 = a_1x + b_1z + c_1p + cste$$
$$y_2 = a_2x + b_2z + \mathrm{c_2p} + \mathrm{cste}$$
$$y_3 = a_3x + b_3z + \mathrm{c_3p} + \mathrm{cste}$$

➔ Là encore, on voit qu'en substituant x par z et p, on retrouve le cas d'un problème linéaire à deux inconnues que l'on sait résoudre.

Contexte : problèmes et équations linéaires

Prenons maintenant le cas général d'un problème à n équations et m inconnues tel que :

$$\begin{gathered}\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \cdots + \omega_1 x_n = y_1 \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 + \cdots + \omega_2 x_n = y_2 \\ \ldots \\ \alpha_n x_1 + \beta_n x_2 + \gamma_n x_3 + \cdots + \omega_n x_n = y_n\end{gathered}$$

Ce problème à n équations à t-il des solutions ? Si oui combien ? De quelles formes ?

C'est à ces questions que *l'algèbre linéaire* nous permet de répondre : c'est l'objectif de ce module d'enseignement.

Aix*Marseille université
Socialement engagée

Introduction

Structure des ensembles – Lois de composition interne et externe

Aix*Marseille université Socialement engagée

Structuration des ensembles

Définition : En mathématiques, un **ensemble** est un objet qui contient d'autres objets mathématiques de même nature. Par exemple, $\mathbb{N}$ est l'ensemble qui contient tous les nombres entiers.

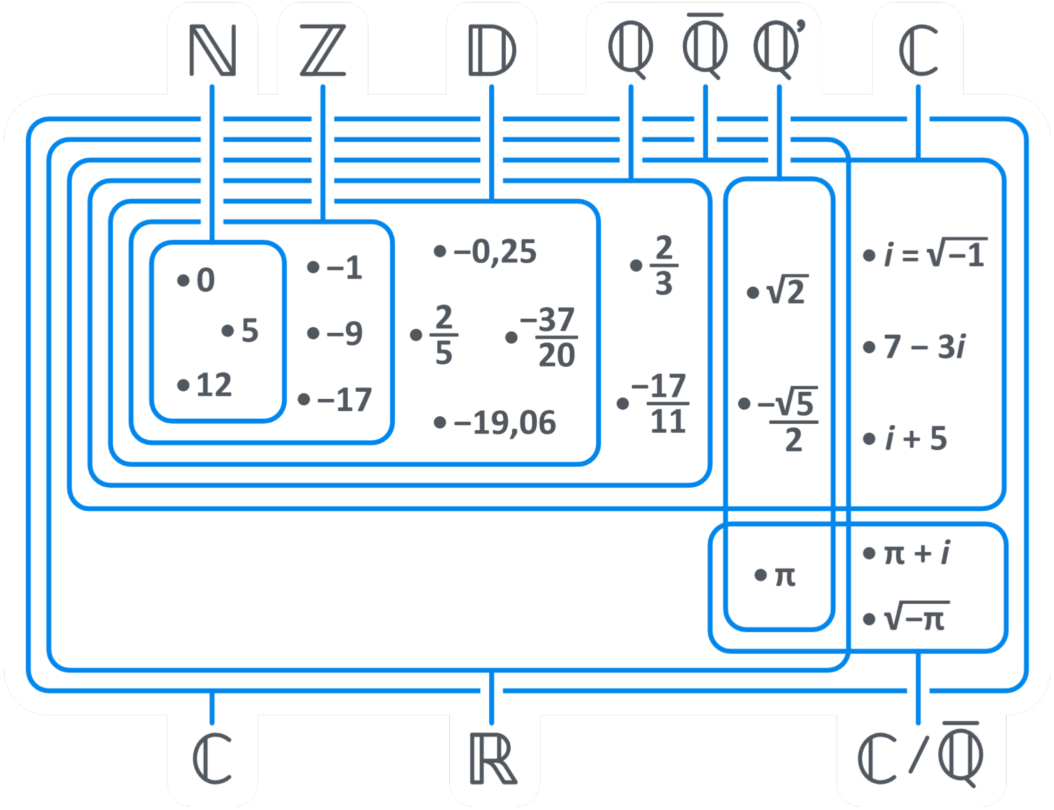
Notation :

- Le symbole $\in$ veut dire « appartient », il signifie que l'objet à gauche appartient à l'ensemble de droite : $1 \in \mathbb{N}$; $296\,483 \in \mathbb{N}, \ldots$
- Le symbole $\notin$ veut dire « n'appartient pas », il signifie que l'objet à gauche n'appartient pas à l'ensemble de droite : $0.1 \notin \mathbb{N}, -1200 \notin \mathbb{N}$
- Le symbole $\subset$ veut dire « inclus dans », il signifie que l'ensemble à gauche est inclus dans l'ensemble à droite : $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}, \ldots$
- Le symbole $\not\subset$ veut dire « n'est pas inclus dans », il signifie que l'ensemble à gauche n'est pas inclus dans l'ensemble à droite : $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z}^*$

Structuration des ensembles

<u>Rappel des ensembles :</u>

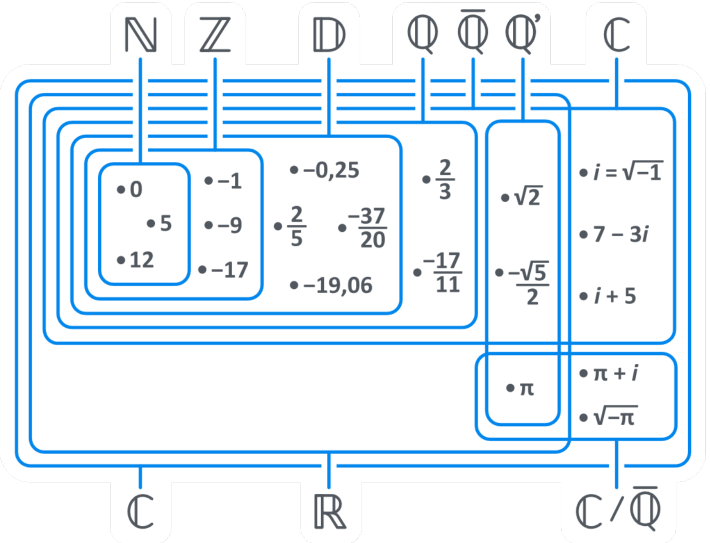
$\mathbb{N}$: nombres naturels
$\mathbb{Z}$: nombre entiers
$\mathbb{D}$: nombres décimaux
$\mathbb{Q}$: nombres rationels
$\mathbb{Q}$' : nombre irrationnels
$\mathbb{R}$: nombres réels
$\overline{\mathbb{Q}}$: nombres algébriques
$\mathbb{C}$: nombre complexe



Structuration des ensembles

<u>Définition</u> :

- L'**intersection** de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$ contient l'ensemble des éléments à la fois dans A et dans B. Par exemple $A \cap B = \{x, x \in A \; et \; x \in B\}$
- L'**union** de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$ contient l'ensemble des éléments de A et ceux de B. Par exemple $A \cup B = \{x, x \in A \; ou \; x \in B\}$



Structuration des ensembles

<u>Notation de description d'un ensemble :</u>

- Les éléments d'un ensemble sont toujours placés entre accolade :

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

- On peut aussi donner les conditions qui définissent l'ensemble :

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$$

ainsi $(0, -1, 1) \in A$ mais $(1,0,1) \notin A$

<u>Loi de Composition Interne (L.C.I.) sur un ensemble E:</u>

Par définition une L.C.I. est une opération mathématique combinant deux éléments d'un même ensemble pour en donner un troisième appartenant à cet ensemble.

Ainsi, l'**addition** est une L.C.I. sur $\mathbb{N}$ $(1 + 2 \in \mathbb{N})$, en revanche la **soustraction** n'est pas une L.C.I. sur $\mathbb{N}$ $(3 - 4 \notin \mathbb{N})$

Structuration des ensembles

Propriétés des L.C.I.

Soit une L.C.I. sur un ensemble A notée $\star$ (ce symbole peut être remplacé par $+, -, \times, \div$)

- La loi est dite associative si pour tous les éléments de A on a :
$$x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$$
- La loi est dite commutative si pour tous les éléments de A on a :
$$x \star y = y \star a$$

N.B.: pour l'associativité, l'ordre des éléments doit être le même des deux côtés de l'égalité ; ces deux propriétés sont indépendantes.

Exemples : L'**addition** est associative et commutative sur tous les ensembles de nombres. La **soustraction** en revanche n'est pas associative.

Structuration des ensembles

Si une L.C.I. est associative, on peut enlever les parenthèses. Lorsqu'une soustraction intervient dans une équation, il faudra donc garder les parenthèses.

Sur $\mathbb{R}$ la loi $\star$ définie par $x \star y = x^2 + y^2$ est commutative. En effet :

$$x \star y = x^2 + y^2 = y^2 + x^2 = y \star x$$

mais elle n'est pas associative :

$$(1 \star 1) \star 2 = (1^2 + 1^2)^2 + 2^2 = 8$$

et

$$(1 \star 2) \star 1 = (1^2 + 2^2)^2 + 1^2 = 26$$

<u>Remarque générale</u> : pour montrer une propriété d'une L.C.I. il faut étudier le cas général, en revanche pour montrer qu'elle ne s'applique pas un seul contre-exemple suffit.

Structuration des ensembles

Une L.C.I. $\star$ sur un ensemble A admet un élément neutre si et seulement si il existe un élément α de A tel que pour tout x de A on ait :

$$\alpha \star x = x \star \alpha = x$$

- Si il existe, cet élément neutre doit être unique.
- Pour l'**addition**, l'élément neutre est 0
- Pour la **multiplication**, l'élément neutre est 1

- La **soustraction** n'a pas d'élément neutre $(0 - 1 \neq 1 - 0 \neq 1)$, tout comme le **produit vectoriel**

Structuration des ensembles

Une L.C.I. $\star$ sur un ensemble A admet un symétrique, si et seulement si, A a un élément neutre a et si pour tout élément x de A il existe un élément $\bar{x}$ tel que :

$$x \star \bar{x} = \bar{x} \star x = a$$

- Si la loi est associative, le symétrique quand il existe est unique
- Pour l'**addition**, tous les éléments a de A ont un symétrique que l'on nomme l'opposé, tel que $\bar{a} = -a$
- Pour la **multiplication**, tous les éléments sauf 0 ont un symétrique tel que : $\bar{a} = \frac{1}{a}$

Structuration des ensembles

Structure de groupe

Soit un ensemble A muni d'une L.C.I. $\star$
A muni de cette loi est un groupe si et seulement si :
- la loi $\star$ est associative
- la loi $\star$ admet un élément neutre
- tous les éléments de A admettent un symétrique

N.B. : Si en plus la loi $\star$ est commutative, alors le groupe est commutatif, appelé aussi groupe abélien.

Exemples :

- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ munis de l'addition sont commutatifs
- L'ensemble des vecteurs de l'espace, muni de l'addition des vecteurs, est un groupe commutatif
- L'ensemble des fonctions $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ muni de l'addition des fonctions est un groupe commutatif

Structuration des ensembles

Soit A un ensemble, on appelle **Loi de Composition Externe** (L.C.E.) une application qui combine un réel (ou un complexe) et un élément de A pour donner un élément de A.

La différence avec une L.C.I. est que dans le cas d'une L.C.E. on combine des éléments mathématiques de nature différente. Il faudra donc avoir une définition précise et adaptée à la nature des éléments de A.

Les L.C.E. sont généralement notée avec un point $(.)$

<u>Exemples :</u>

- Dans l'ensemble des vecteurs, multiplier un vecteur par un nombre réel donne le vecteur de même direction, dont la longueur a été multipliée par un nombre réel, de même direction si le réel est positif ou de direction opposée sinon.
- Dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on définit la multiplication d'une fonction f par un nombre λ en définissant la fonction $\lambda \cdot f(x) = \lambda \times f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Les Espaces Vectoriels

Les espaces vectoriels

<u>Définition</u> : Un ensemble A muni d'une L.C.I., notée « $\star$ », et d'une L.C.E., notée « $\cdot$ » , est un espace vectoriel noté $(A,\ \star,\ \cdot)$ si et seulement si :

- A muni de sa L.C.I. est un groupe commutatif
- Les deux lois présentent les propriétés suivantes :

  pour tout $u, v \in A$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

  - $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
  - $(\lambda \star \mu) \cdot u = \lambda \cdot u \star \mu \cdot u$
  - $\lambda \cdot (u \star v) = \lambda \cdot u \star \lambda \cdot v$
  - $1 \cdot u = u$

Élément neutre

Les espaces vectoriels

Exemple 1 : Cas général

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$ muni des lois définies par :

- $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y + n\,)$
- $\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n)$

On peut facilement vérifier que l'ensemble des conditions définissant un espace vectoriel sont satisfaites

Exemple 2 : Ensemble des fonctions réelles

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \times f(x)$

Là aussi les conditions d'un espace vectoriel sont réunies

Les espaces vectoriels

<u>Conséquence sur les calculs dans un espace vectoriel</u>

dans ce qui suit, l'élément neutre sera noté 0_A *pour le différentier du nombre réel* 0

- Pour tout $a \in A, 0 \cdot a = 0_A$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot 0_A = 0_A$
- Si $\lambda \cdot a = 0_A$, alors $\lambda = 0$ ou $a = 0$
- Pour tout $a \in A$, $(-1) \cdot a = -a$ où $-a$ est l'opposé de a par rapport à la L.C.I.

Ces résultats valident des résultats qui semblent intuitifs parce qu'ils ressemblent à des régles que l'on connait mais ils s'appliquent à des cas bien plus complexes (par exemple a peut être un vecteur à n dimensions).

Les espaces vectoriels

Démonstration des propriétés précédentes :

$0 \cdot a = 0 \cdot a + 0_A$	0_A est l'élément neutre
$= 0 \cdot a + \big(a + (-a)\big)$	définition du symétrique
$= (0 \cdot a + a) + (-a)$	associativité de l'addition
$= (0 \cdot a + 1 \cdot a) + (-a)$	dernière règle définissant un espace vectoriel
$= \big((0+1) \cdot a\big) + (-a)$	deuxième règle définissant un espace vectoriel
$= (1 \cdot a) + (-a)$	
$= a + (-a) = 0_A$	définition de l'opposé

$$\lambda \cdot 0_A = \lambda \cdot (0 \cdot a) = (\lambda 0) \cdot a = 0 \cdot a = 0_A$$

Supposons que $\lambda \cdot a = 0_A$ et $\lambda \neq 0$

alors λ admet un inverse $\frac{1}{\lambda}$ et $\left(\frac{1}{\lambda}\right)(\lambda \cdot a) = 0_A$ car $\lambda \cdot a = 0_A$

et $\left(\frac{1}{\lambda}\right)(\lambda \cdot a) = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right) \cdot a = 1 \cdot a = a$ donc $a = 0_A$

Les espaces vectoriels

Démonstration des propriétés précédentes :

$$(-1)\cdot a = (-1)\cdot a + 0_A = (-1)\cdot a + a + (-a) = (-1)\cdot a + 1\cdot a + (-a)$$
$$= (-1+1)\cdot a + (-a) = 0\cdot a + (-a) = 0_A + (-u) = -u$$

Les sous espaces-vectoriels

Soit A un espace vectoriel, muni des lois $+$ et $\cdot$. Comme dans tout ensemble, on peut définir des sous-ensembles (appelés aussi «parties ») qui sont des ensembles inclus dans A.

Par exemple, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 1\}$ qui représente les coordonnées du cercle de centre (0,0) et de rayon 1, est un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$.

$G = \{(x, y) \in x + 2y = 0\}$ qui représente les coordonnées des points sur la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$, en est un autre.

Ces deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ n'ont pas les mêmes propriétés par rapport aux deux lois qui structurent $\mathbb{R}^2$ en tant qu'espace-vectoriel :

- L'élément $(1,0)$ appartient à F, mais ce n'est pas le cas de l'élément $2 \cdot (1,0) = 2,0)$ car $2^2 + 0 \neq 1$
- Par contre l'élément $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ appartient à G et c'est aussi le cas de $2 \cdot \left(1, -\frac{1}{2}\right) = (2, -1)$ car $2 + 2 \times (-1) = 2 - 2 = 0$

Les sous espaces-vectoriels

Plus généralement, si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont des éléments de G et λ un réel considérons alors les éléments :

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

Pour savoir si ces éléments appartiennent à G il faut et il suffit de vérifier si leurs coordonnées vérifient l'équation qui définit G.

Or

- $(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) = (x_1 - 2\,y_1) + (x_2 - 2\,y_2) = 0$ car (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont des éléments de G donc $x_1 - 2y_1 = 0$ et $x_2 - 2y_2 = 0$.
- $(\lambda x_1) - 2(\lambda y_1) = \lambda(x_1 - 2y_1) = 0$ car $(x_1, y_1) \in G$, donc $x_1 - 2y_1 = 0$

On voit donc que la sonne de deux éléments de G est encore un élément de G, et que multiplier un élément de G par un réel donne également un élément de G

G est stable par les lois de composition interne et externe de A

Les sous espaces-vectoriels

Définition :

Si A est un espace vectoriel, alors un sous-ensemble F de A est un sous-espace vectoriel de A si et seulement si :

- F est non vide
- Pour tout $u, v \in F, u + v \in F$
- Pour tout $u \in F, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot u \in F$

Un sous-espace vectoriel est donc un sous-ensemble non-vide et stable par les lois de l'espace vectoriel. Dans la suite de ce cours, nous utiliserons la notation s.e.v. pour désigner un sous-espace vectoriel.

Les sous espaces-vectoriels

Exemple 1 :

Vérifions que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x + y + z = 0\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

- $(1, 1, -2) \in F$; donc F est non-vide
- Soit $u = (x_1, y_1, z_1) \in F$ et $v = (x_2, y_2, z_2) \in F$ alors,

$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ et

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = \underbrace{(x_1 + y1 + z1)}_{=0 \text{ car } u \in F} + \underbrace{(x_2 + y_2 + z_2)}_{=0 \text{ car } v \in F}$$

donc $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)$ =0, donc $u + v \in F$

- Soit $u = (x_1, y_1, z_1) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors,

$\lambda \cdot u = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ et $\lambda x_1 + \lambda y_1 + \lambda z_1 = \lambda\underbrace{(x_1 + y_1 + z_1)}_{=0 \text{ car } u \in F}$

donc $\lambda x_1 + \lambda y_1 + \lambda z_1 = 0$, donc $\lambda \cdot u \in F$

F est bien un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$

Les sous espaces-vectoriels

<u>Exemple 2 :</u>

Vérifions que $F = \{f \in E ; f(2) = 0\}$ est un s.e.v. de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ [cad l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$]. F serait donc l'ensemble des fonctions dont la valeur en $x = 2$ vaut 0.

- Soit la fonction définie par $f(x) = x - 2$ alors $f \in F$ donc F est non-vide
- Si $f \in F$ et $g \in F$ alors $f(2) = 0$ et $g(2) = 0$; et $(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 0$
  ➔ donc la fonction $f + g$ appartient bien à F
- Si $f \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f(2) = 0$ et $(\lambda \cdot f)(2) = \lambda f(2) = \lambda \times 0 = 0$
  ➔ donc la fonction $\lambda \cdot f$ appartient bien à F

↳ **F est bien un s.e.v. de E**

Les sous espaces-vectoriels

<u>Contre-exemple :</u>

Vérifions si $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 1\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$

- $u = (1,0,0) \in F$ donc F est donc non-vide
- soit $\mathrm{v} = (0,1,0)$, alors

$$u + v = (1 + 0,0 + 1,0 + 0) = (1,1,0)$$

Or $1 + 1 + 0 \neq 1$ donc F n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$

Les sous espaces-vectoriels

<u>Quelques propriétés des sous-espaces vectoriels</u>

Si $(E, +, \cdot)$ est un espace-vectoriel alors :

- E est un sous-espace vectoriel de E
- $\{0_E\}$ (le sous ensemble qui ne contient que 0_E, l'élément neutre de l'addition dans E) est un s.e.v. de E
- 0_E appartient à tous les s.e.v. de E (il suffit d'utiliser la troisième condition de la définition avec $\lambda = 0$)
- Par contraposée, on peut affirmer qu'un sous-ensemble qui ne contient pas 0_E n'est pas un sous-espace vectoriel

Les sous espaces-vectoriels

<u>Quelques propriétés des sous-espaces vectoriels</u>

si $(E, +, \cdot)$ est un espace-vectoriel et F un s.e.v. de E alors :

F muni des lois de E restreintes aux éléments de F est un espace vectoriel

Cette propriété permet de ne pas redémontrer toutes les propriétés des lois d'un espace vectoriel, par exemple si on veut montrer que l'ensemble des fonctions polynomiales est un espace vectoriel, il suffit de montrer que c'est un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Les sous espaces-vectoriels

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel

Les conditions suivantes sont équivalentes à celles qui définissent un s.e.v.

Si E est un espace vectoriel alors F est un s.e.v. de E si et seulement si :

- $0_E \in F$
- Pour tout $u, v \in F;\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,;\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$

La première condition permet de montrer que F est non-vide

La seconde regroupe les deux autres conditions définissant un s.e.v. en une seule.

Les sous espaces-vectoriels

<u>Propriété d'un sous-espace vectoriel</u>

L'intersection de deux s.e.v. est un s.e.v.

Soient $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel et F et G deux s.e.v. de E

- Par définition d'un s.e.v., $0_E \in F$ et $0_E \in G$, donc $0_E \in F \cap G$
- Soient $u, v \in F \cap G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:
  - Comme $u, v \in F \cap G$ alors $u, v \in F$, or F est un s.e.v. donc $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$
  - Comme $u, v \in F \cap G$ alors $u, v \in G$, or G est un s.e.v. donc $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in G$

➔ Donc $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F \cap G$

$F \cap G$ est bien un s.e.v. car il satisfait les conditions requises

Les sous espaces-vectoriels

Propriété d'un sous-espace vectoriel

L'union de deux s.e.v. n'est en general pas un s.e.v.

Si F et G sont distincts, il n'y a aucune raison, si on prend u dans F (donc dans $F \cup G$) et v dans G (donc dans $F \cup G$), que $u + v$ soit dans F ou dans G.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, soit $F = \{(x, y); x = 0\}$ et $G = \{(x, y); y = 0\}$ qui sont deux s.e.v.

Si on prend $u = (0,1) \in F$ et $v = (1,0) \in G$, on voit que $u + v = (1,1) \notin F \cup G$

Les sous espaces-vectoriels

Propriété d'un sous-espace vectoriel

L'union de deux ensembles est le plus petit ensemble qui contient les éléments des deux ensembles, mais comme nous venons de le voir, l'union de préserve pas la structure.

On peut donc se demander quel serait le plus petit sous espace vectoriel qui contient deux s.e.v F et G ?

On définit la somme de deux sous-espaces vectoriels F et G (notée $F + \mathrm{G}$) par :

$$F + G = \{u + v, u \in F, v \in G\}$$

$F + G$ est donc formé d'éléments qui se décomposent comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G. Alors :

- $F \cup G \subset F + G$
- $F + G$ est un s.e.v de $(E, +, \cdot)$
- $F + G$ est le plus petit s.e.v. qui contient F et G

Les sous espaces-vectoriels

Demonstrations

Soit $u \in F$. Comme G est un s.e.v., alors par définition $0_E \in G$;
donc $u + 0_E \in F + G$ (on a bien la somme d'un élément de F et d'un élément de G, donc un élément de $\mathrm{F} + G$).
Mais $u + 0_E = u$
➔donc tout élément $u \in F$ appartient à $\mathrm{F} + G$

De la même façon, tout élément de G appartient à $\mathrm{F} + G$

Par conséquent, tout élément de $\mathrm{F} \cup G$ appartient à $\mathrm{F} + G$, **donc $\mathbf{F} \cup \boldsymbol{G} \subset \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$**

Les sous espaces-vectoriels

<u>Demonstrations</u>

Soit $w_1, w_2 \in F + G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Par définition de $F + G$ il existe donc :

- $u_1 \in F$ et $v_1 \in G$ tel que $u_1 + v_1 = w_1$
- $u_2 \in F$ et $v_2 \in G$ tel que $u_2 + v_2 = w_2$

- F et G sont des s.e.v. donc $0_E \in F$ et $0_E \in G$, et donc $0_E + 0_E = 0_E \in F + G$
- $\lambda w_1 + \mu w_2 = \lambda(u_1 + v_1) + \mu(u_2 + v_2) = (\lambda u_1 + \lambda_{v1}) + (\mu u_2 + \mu v_2) = (\lambda u_1 + \mu u_2) + (\lambda v_1 + \mu v_2)$

Mais $\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2 \in F$ (par definition d'un s.e.v.) et $\lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2 \in G$
Donc $\lambda w_1 + \mu w_2$ est la somme d'un élément de F et d'un élément de G, donc $\lambda w_1 + \mu w_2 \in F + G$

Par conséquent, $\boldsymbol{F + G}$ est un sous-espace vectoriel

Les sous espaces-vectoriels

Demonstrations

Soit H un s.e.v. contenant F et G, H contient donc tous les éléments de F et tous ceux de G

Soit $w \in F + G$, alors il existe $\mathrm{u} \in F$ et $v \in G$ tel que $w = u + v$

Par défintion de H, $u \in H$ et $v \in H$

Comme H est un s.e.v., $w = u + v \in H$ donc Hcontient tous les éléments de $F + G$

➔ N'importe quel s.e.v. H contenant F et G contient donc $F + G$, donc $F + G$ est le plus petit s.e.v. contenant F et G

Résumé du dernier cours

Un ensemble est toujours défini comme suit :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 6x + 4y = 10\}$$

L'ensemble

Les coordonnées de l'ensemble

La condition que doivent remplir les coordonnées pour appartenir à l'ensemble A

L'ensemble d'où sont tirées les coordonnées

Pour savoir si un vecteur $v(x_1, y_1)$ appartient à A (on écrira alors $v \in A$), il suffit de remplacer les coordonnées de v dans l'équation définissant l'ensemble.

Ainsi : $(1,1) \in A$; $(0,2.5) \in A$; $\left(\frac{10}{6}, 0\right) \in A$

Mais $(0,1) \notin A$; $(1,0) \notin A$; $(2,1) \notin A$

Résumé du dernier cours

Les opérations sur les ensembles sont appelés : Loi de Composition.
Celles-ci peuvent être interne (LCI) ou externe (LCE).

Loi de Composition Interne (LCI) : opération entre élément de même ensemble.
Loi de Composition Externe (LCE) : opération entre un réel et un élément d'un ensemble.

Cela permet de séparer les opérations faites entre les éléments de l'ensemble et celles faites entre un réel et un élément de l'ensemble

---

Soit u et v deux élements du même ensemble A

- Une Loi de Composition Interne pourra donc s'écrire :$u \star v$ (où $\star = +, -, \times, \div$)
- Une Loi de Composition Externe pourra s'écrire : $\lambda \times v$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Résumé du dernier cours

Soit un ensemble A muni d'une L.C.I. $\star$

A muni de cette loi **est un groupe** si et seulement si :

- la loi $\star$ est associative
- la loi $\star$ admet un élément neutre
- tous les éléments de A admettent un symétrique

La position des parenthèses n'a pas d'influence sur le résulat :
$$u \star (v \star w) = (u \star v) \star w$$

Appliquer la LCI entre un élément de l'ensemble et un élément neutre, donne le même élément de l'ensemble
$$u \star 0_A = u$$

La LCI appliquée à un élément de l'ensemble et à son symetrique donne l'élément neutre
$$v \star \overline{v} = 0_A$$

Résumé du dernier cours

Notée $\star$

On définit un **espace vectoriel** comme un ensemble muni d'une LCI commutative et d'une LCE avec les propriétés suivantes :

Notée $\cdot$

pour tout $u, v \in A$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$$
$$(\lambda \star \mu) \cdot u = \lambda \cdot u \star \mu \cdot u$$
$$\lambda \cdot (u \star v) = \lambda \cdot u \star \lambda \cdot v$$
$$1 \cdot u = u$$

Il est noté : $(A, \ \star, \ \cdot)$

Exemple : soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $i, j \in A$ où A est un espace vectoriel

$$(\alpha \blacksquare \beta) \blacksquare (i \blacksquare j) = 0_A$$
$$\alpha \blacksquare i \blacksquare (\beta \blacksquare j) = 0_A$$

Résumé du dernier cours

Notée $\star$

On définit un **espace vectoriel** comme un ensemble muni d'une LCI commutative et d'une LCE avec les propriétés suivantes :

Notée $\cdot$

pour tout $u, v \in A$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$$
$$(\lambda \star \mu) \cdot u = \lambda \cdot u \star \mu \cdot u$$
$$\lambda \cdot (u \star v) = \lambda \cdot u \star \lambda \cdot v$$
$$1 \cdot u = u$$

Il est noté : $(A, \ \star, \ \cdot)$

Exemple : soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $i, j \in A$ où A est un espace vectoriel

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot (i \star j) = 0_A$$
$$(\alpha \cdot i) \star (\beta \cdot j) = 0_A$$

Résumé du dernier cours

Un sous-espace vectoriel est un ensemble qui ne contient qu'une partie des éléments d'un ensemble vectoriel.

Si A est un espace vectoriel, alors un sous-ensemble F de A est un sous-espace vectoriel de A si et seulement si :

1. F est non vide
2. Pour tout $u, v \in F, u + v \in F$
3. Pour tout $u \in F, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot u \in F$

<u>Exercice</u> : Démontrez que $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y = z\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Résumé du dernier cours

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y = z\}$$

<u>1ére étape</u> : démontrez que A est non–vide

➔ il faut et il suffit de trouver un vecteur pour lequel les coordonnées (x, y, z) obéissent à a condition qui définit A

(2,1,1) est un exemple de vecteur qui répond à la condition car :

$$2 - 1 = 1 \leftrightarrow x - y = z$$

A est donc non vide ➔ condition 1 remplie !

<u>2e étape</u> : démontrez que $u + v \in A$ avec $u = \{x_1, y_1, z_1)$ et $v = \{x_2, y_2, x_2\}$ alors

$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ et $u + v = (x_1 + x_2 - (y_1 + y_2) = (z_1 + z_2)$ ou encore

$$u + v = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 = z_1 + z_2$$

A est stable par la LCI ➔ condition 2 remplie !

Résumé du dernier cours

<u>3e étape</u> : démontrez que $\lambda \cdot u \in A$ avec $u = \{x_1, y_1, z_1\}$

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot (x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$$

Et

$$\lambda x_1 + \lambda y_1 = \lambda z_1$$
$$\lambda(x_1 + y_1) = \lambda z_1$$

Or

$x_1 + y_1 = z_1$ par défintion de A donc $\lambda \cdot u \in A$

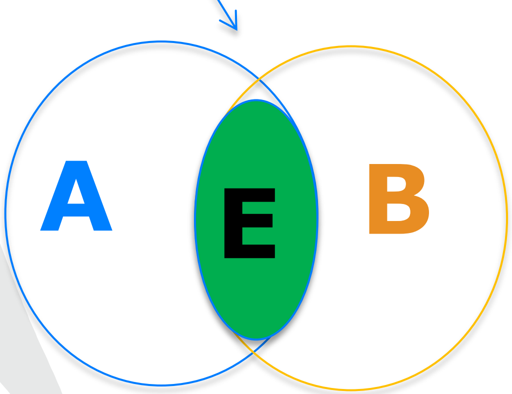
A est stable par la LCE ➔ condition 3 remplie !

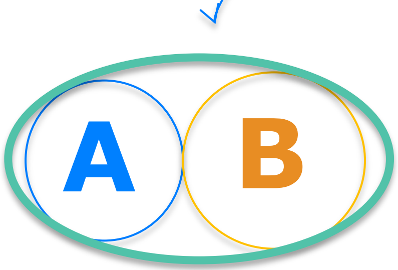
A rempli toutes les conditions, A est donc bien un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Résumé du dernier cours

Deux propriétés interessantes des sous espaces vectoriels :

1. L’intersection de deux sous espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel
2. L’union de deux sev n’est en général pas un sev





Chapitre 2 : Familles de vecteurs

Définitions

Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel.

On appelle famille de vecteurs et on note $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tout ensemble fini F de vecteurs de E.

On appelle combinaison linéaire des vecteurs de F tout vecteur de la forme $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$ où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des réels.

Ainsi 0_E est combinaison linéaire de n'importe quelle famille de vecteurs (avec tous les coefficients nuls)

Toute combinaison linéaire de combinaisons linéaires est une combinaison linéaire.

Définitions

⚠ un vecteur peut s’écrire comme deux combinaisons linéaires différentes de la même famille.

Par exemple dans $\mathbb{R}^3$, en prenant :

$F = \{e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,0); e_3 = (1,1,0)\}$ alors :

$$\begin{aligned} 0_E &= 0 \times e_1 + 0 \times e_2 + 0 \times e_3 \\ &= 1 \times e_1 + 1 \times e_2 - e_3 \end{aligned}$$

Définitions

Soit $F = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

On note $Vect(F)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des éléments de F :

$$Vect(F) = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n ; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

THEOREME

$Vect(F)$ est un sous-espace vectoriel qui contient tous les vecteurs de F, c'est le plus petit s.e.v. ayant cette propriété.

Aix*Marseille université
Socialement engagée

Définitions

Démonstration du théoréme :

- soit $e_i = 0\times e_1 + \cdots + 1\times e_i + \cdots + 0\times e_n ; i = 1, \dots , n$ donc $Vect(F)$ contient tous les vecteurs de F (et il est donc non vide)

- soit aussi deux vecteurs $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in Vect(F)$ alors :
  - il existe $\lambda_1, \dots , \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$
  - il existe $\mu_1, \dots , \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que $v = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n$

et donc :

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v &= \alpha(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n) + \beta(\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n) \\ &= (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1)e_1 + (\alpha\lambda_2 + \beta\mu_2)e_2 + \cdots + (\alpha\lambda_n + \beta\mu_n)e_n \end{aligned}$$

Donc $\alpha u + \beta v \in Vect(F)$

Donc $Vect(F)$ est un s.e.v. qui contient F

Définitions

Démonstration du théoréme (suite):

Soit H un sous-espace vectoriel qui contient F.

Montrons par récurrence que toutes les combinaisons linéaires (C.L.) des vecteurs de F appartiennent à H.

Le raisonnement par récurrence vise à démontrer une propriété sur tous les entiers naturels. Il consiste à démontrer que :
- la propriété est vrai pour un entier n_0 (généralement 0 ou 1)
- chaque fois que cette propriété est satisfaite pour un entier $n \geq n_0$, elle l'est aussi pour son successeur $n+1$

L'hypothèse de récurrence (HR) d'ordre k ($k \in \mathbb{N}$) est que toutes les C.L. de $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ appartiennent à H.

- Comme $e_1 \in H$, et H est un s.e.v., alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 e_1 \in H$ donc $HR(1)$ est verifié

- Si $HR(k)$ est vrai, alors $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_k e_k \in H$, or comme $e_{k+1} \in H$ et que H est un s.e.v. :
$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} \in H$ donc $HR(k+1)$ est vérifié.

On a donc montré que toutes les C.L. des vecteurs de F sont dans H, ce qui prouve que $Vect(F) \subset H$

Définitions

Exemples de sous-espaces vectoriels engendrés dans $\mathbb{R}^n$:

- Si $F = \{e_1\}$ alors $vect(F) = \{\lambda e_1, \lambda \in \mathbb{R}\}$, c'est donc la droite vectorielle passant par l'origine, portée par le vecteur e_1 (ou $\{0_E\}$ si $e_1 = 0_E$)

- Si $F = \{e_1, e_2\}$, si e_1 et e_2 sont colinéaires, on retrouve la droite vectorielle portée par e_1 (ou e_2 puisque c'est la même), sinon on obtient un plan défini par l'origine et les deux vecteurs

- Cas très particulier : si F est vide (donc ne contient aucun vecteur), alors $Vect(F) = \{0_E\}$ (c'est en effet le plus petit s.e.v. qui contient F puisqu'un s.e.v., par définition, ne peut pas être vide.

Aix*Marseille université
Socialement engagée

Familles génératrices

Des familles de vecteurs permettant d'engendrer un espace vectoriel par combinaison linéaire

Familles génératrices

Définition : Si E est un espace vectoriel , et $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, une famille de vecteurs de E, F est dite génératrice de E si $Vect(F) = E$

Propriétés :

- Si $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ est une famille de vecteurs de E alors $Vect(G) \subset E$

Une famille de vecteur de E ne peut engendrer qu'un seul espace vectoriel à l'interieur de E

- $Vect(\{f_1, f_2, \dots, f_n\}) = Vect\left(\{f_1, f_2, \dots, f_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j e_j, \dots., f_n\}\right)$
  si on ajoute à un des vecteurs d'une famille une combinaison linéaire des autres vecteurs, l'espace vectorial engender reste le même.

Familles génératrices

- Si f_{n+1} est une combinaison linéaire de $f_1, f_2, \dots, f_n$, alors $Vect(\{f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}\}) = Vect(\{f_1, f_2, \dots, f_n\})$
- En particulier $Vect(\{f_1, f_2, \dots, f_n, 0_E\}) = Vect(\{f_1, f_2, \dots, f_n\})$

Donc si un des vecteurs d'une famille est une C.L. des autres, ou si on obtient le vecteur nul en ajoutant à un vecteur une C.L. des autres vecteurs, on peut simplifier la famille génératrice en enlevant le vecteur en question.

- Soit $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ une famille génératrice de E. Si $G = \{g_1, g_2, \dots, g_p\}$ est une autre famille de vecteurs tels que chaque f_i est une combinaison linéaire des vecteurs de G, alors G est une génératrice de E.

Attention cette propriété ne peut pas s'utiliser dans l'autre sens, car la famille G pourrait n'être formée que du vecteur nul, donc de vecteurs qui sont C.L des vecteurs de F mais pas génératrice de E.

Familles génératrices

Caracterisation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Soit $\mathbb{R}^n = \{u = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$, les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les coordonnées ou composantes de u.

Soit F une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. $Vect(F)$ est formé de vecteurs dont les coordonnées sont des combinaisons linéaires des coordonnées correspondantes des vecteurs de F.

Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F = \{(1,-1,1,-1); (1,1,1,1)\}$ alors :

$$\begin{aligned} Vect(F) &= \{(\lambda(1,-1,1,-1) + \mu(1,1,1,1); \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\lambda+\mu, -\lambda+\mu, \lambda+\mu, -\lambda+\mu); \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} \lambda+\mu \\ -\lambda+\mu \\ \lambda+\mu \\ -\lambda+\mu \end{pmatrix}; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

↳ Cette representation est dite paramétrique car les coordonnées d'un vecteur (x_1, x_2, x_3, x_4) de $Vect(F)$ sont exprimées en fonction des deux paramètres λ et μ

Familles génératrices

Une autre représentation existe : les équations cartésiennes qui relient les coordonnées entre elles. Elles s'obtiennent en éliminant les paramétres entre toures les coordonnées :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda + \mu \\ x_2 = -\lambda + \mu \\ x_3 = \lambda + \mu \\ x_4 = -\lambda + \mu \end{cases}$$

Dans cet exemple simple, comme il y a deux paramètres, on peut les éliminer dans deux groupes de coordonnées pour obtenir deux équations qui s'obtiennent sans caclul :

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$$

Ces équations ne sont pas uniques, on peut vérifier par exemple :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Peuvent également être obtenues à partir des équations paramétriques.

Aix*Marseille université
Socialement engagée

Familles Libres

Des familles de vecteurs linéairement indépendants

Définition

Une famille de vecteurs $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ de E est dite libre (ou linairement indépendante) si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0_E \text{ équivaut à } \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Autrement dit, la seule combinaison linéaire des vecteurs de F qui vaut 0_E est celle pour laquelle tous les coefficients sont nuls.

Dans le cas contraire, la famille est liée.

Si la famille F est liée, alors il existe une combinaison linéaire de ses vecteurs qui vaut 0_E et dont un des coefficients n'est pas nul (si une telle C.L. n'existe pas alors la famille est libre). Supposons que ce coefficient soit λ_n (sinon on change le numéro des vecteurs). On peut alors écrire : $\lambda_n e_n = -\lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 - \cdots - \lambda_{n-1} e_{n-1}$

Donc $e_n = \frac{1}{\lambda_n}(-\lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 - \cdots - \lambda_{n-1} e_{n-1})$

Un des vecteurs de F est donc C.L. des autres. La demonstration du raisonnement réciproque est similaire, on peut conclure qu'une famille est liée si et seulement si un de ses vecteurs est C.L. des autres

Définition

On peut de même conclure qu'une famille de vecteurs est libre si aucun de ses vecteurs ne peut s'écrire comme combinaison linéaires des autres.

Cas particuliers :

- Si $F = \{e_1\}$, F est libre si $e_1 \neq 0$, liée sinon
- Si $F = \{e_1, e_2\}$, F est liée si $e_1 \neq 0_E$ ou si il existe λ tel que $e_1 = \lambda e_2$. e_1 et e_2 sont alors dits colinéaires.

La seconde condition ne suffit pas car si $e_1 \neq 0_E$ et $e_2 = 0_E$, le réel λ n'existe pas mais la famille est quand même liée.

Propriétés des familles libres

Soit $\{e_1, \dots, e_k\}$ une famille libre et $e_{k+1} \notin Vect(\{e_1, \dots, e_k\})$, alors $\{e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ est également libre.

Démonstration :

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n + \lambda_{n+1} e_{n+1} = 0_E$

Si $\lambda_{n+1} \neq 0$ alors on peut comme précédemment écrire e_{n+1} comme la C.L. de $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, mais cela contredit la seconde hypothèse.

Donc $\lambda_{n+1} = 0$

On a donc $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$, mais comme il s'agit d'une famille libre, tous les coefficients sont forcément nuls. Donc les $n + 1$ coefficients sont nuls, donc la propriété est prouvée.

Propriétés des familles libres

Soit $\{f_1, \ldots, f_p\}$ une famille libre de F et $\{g_1, \ldots, g_k\}$ une famille libre de G. Si $F \cap G = \{0_E\}$ alors la famille $\{f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_k\}$ est libre.

Démonstration :

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_k$ teks que $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p + \mu_1 g_1 + \cdots + \mu_k g_k = 0_E$

alors $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p = -\mu_1 g_1 - \cdots - \mu_k g_k$

On a alors un vecteur de F (à gauche du signe =) qui est égal à un vecteur de G (à droite). Mais par hypothese, le seul vecteur qui soit dans F et dans G est 0_E. Donc :

$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p = 0_E$ et $\mu_1 g_1 + \cdots + \mu_k g_k = 0_E$

Chacune des deux familles étant libre, tous les coefficients sont nuls, donc la propriété est prouvée.

Propriétés des familles libres

Soit $F = \{f_1, \dots, f_p\}$ une famille libre. Alors tout vecteur de $Vect(F)$ s'écrit comme une C.L. **unique** des vecteurs de F.

Démonstration :

Par definition de $Vect(F)$ tous ses vecteurs sont des C.L. des vecteurs de F, il faut donc prouver l'unicité.

Supposons qu'un vecteur u quelconque de $Vect(F)$ s'écrive à l'aide de deux C.L. :

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p \\ &= \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_p f_p \end{aligned}$$

On a alors : $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p = \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_p f_p$ soit :

$$(\lambda_1 - \mu_1) f_1 + \cdots + (\lambda_p - \mu_p) f_p = 0_E$$

F étant une famille libre on a $(\lambda_1 - \mu_1) = 0, \dots, (\lambda_p - \mu_p) = 0$ donc $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_p = \mu_p$

Les deux C.L. sont identifiques ce qui prouve l'unicité.

Propriétés des familles libres

- Toute famille contenant 0_E est liée
- Toute famille extraite d'une famille libre est libre
- Toute famille contenant une famille liée est liée

Démonstration :

- $0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + \cdots + 0 \cdot f_{n-1} + 1 \cdot 0_E = 0_E$ C'est une C.L. dont un coefficient est non nul, donc la famille est liée
- Si $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k = 0_E$, alors :
  $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k + 0 \cdot f_{k+1} + \cdots + 0 \cdot f_p = 0_E$ Comme la famille $\{f_1, \ldots, f_p\}$ est libre tous les coefficients sont nuls donc la famille $\{f_1, \ldots, f_k\}$ est libre.
- Si par exemple $f_1 = \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_k f_k$ alors
  $f_1 = \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_k f_k + 0 \cdot f_{k+1} + \cdots + 0 \cdot f_p$ donc la famille est liée

Chapitre 3 : Espaces Vectoriels et dimension finie

Définition

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel.

Une base $\mathcal{B}$ de E est une famille qui est à la fois **libre** et **génératrice**.

Conséquence : tout vecteur de $\mathrm{u} \in E$ s'écrit comme une combinaison linéaire unique des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Les coefficients de la combinaison linéaire s'appellent coordonnées (ou composantes) du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$

Théoréme : Si un espace vectoriel E admet une base composé de n vecteurs, toutes les bases de E seront composées de n vecteurs. Ce nombre n est appelé dimension de E

Si E n'admet pas de base, alors E est dit de dimension infinie. C'est par exemple le cas de l'espace vectoriel des fonctions réelles.

Par contre un espace vectoriel de dimension infinie contient des sous-espaces vectoriels de dimension finie.

Exemples

- $\mathbb{R}^n$ est de dimension n

- Si $v_1, v_2, \dots, v_p$est une famille libre, $Vect(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est un sous-espace vectoriel de dimension p

- Dans le cas général, si $v_1, v_2, \dots, v_p$ est une famille de vecteurs, $Vect(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est un sous-espace vectoriel de dimension $m \leq p$. m est appelé le rang de la famille de vecteurs

Théoréme

- Dans un espace vectoriel de dimension n, une famille génératrice comprend au moins n vecteurs, et une famille libre contient au plus n vecteurs

- Dans un espace vectoriel de dimension n, une famille libre de n vecteurs est une base

- Dans un espace vectoriel de dimension n, une famille génératrice de n vecteurs est une base

Les deux derniers points permettent de montrer plus facilement qu'une famille de vecteurs est une base, une des deux conditions ”libre” ou “génératrice” peut être remplacée par “contient n vecteurs”, qui est plus facile à montrer.

Théorème de la base incompléte

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{L}$ une famille libre de vecteurs de E et G une famille génératrice de E. On peut alors compléter $\mathcal{L}$ avec des vecteurs bien choisis de G pour former une base de E.

La méthode de construction sert de démonstration :
- si $\mathcal{L}$ n'est pas déjà une base de E, on prend le premier vecteur de G qui n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(\mathcal{L})$ (ce vecteur existe forcément sinon $\mathcal{L}$ serait génératrice de E), et on l'ajoute à $\mathcal{L}$. Si cette nouvelle famille est une base la demonstration est faite, sinon on recommence le processus avec cette nouvelle famille.

Le processus s'arrête forcément puisqu'une famille contient un nombre fini de vecteurs.

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension n, G une famille génératrice de vecteurs de E. On peut alors former une base de E en utilisant des vecteurs convenablement choisis de G.

La méthode de construction sert de démonstration : on prend le premier vecteur non nul de G; si c'est une base de E la demonstration est faite, sinon on prend le premier vecteur de G qui n'appartient pas au sous-espace vectoriel engender par le precedent. Si cette nouvelle famille (qui est libre par construction) n'est pas une base, on recommence le processus.
Le processus s'arête forcément puisqu'une famille contient un nombre fini de vecteurs.

Théoréme

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, tels que $F \cap G = \{0_E\}$, alors

- $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$
- On peut former une base de $F+G$ en réunissant les vecteurs d'une base de F et d'une base de G
- si $F+G=E$ on dit que F et G sont supplémentaires, tout vecteur de E s'écrit alors de façon unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G

<u>Démonstration :</u>
Le premier point est une conséquence directe du second, il suffit de compter les vecteurs des bases.

Pour le second, il faut montrer qu'une famille formée de l'union d'une base de F et d'une base de G est libre (démonstration déjà faite dans le chapitre précédent) et génératrice, ce qui est vrai puisque tout vecteur de $\mathrm{F}+G$ est la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ; chacun pouvant s'écrire comme C.L des vecteurs de la base de son sous espace vectoriel. La somme est donc C.L. des vecteurs des deux bases, il suffit d'additioner les C.L.

Théoréme des 4 dimensions (cas général du cas précédent)

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

La construction sert de demonstration :

On part d'une base $\mathcal{B}_1$ de $F \cap G$ qu'on complète d'un côté en une base de F grace à une famille $\mathcal{B}_2$ extraite d'une famille génératrice de F, de l'autre en une base de G grace à une famille $\mathcal{B}_3$ extraite d'une famille génératrice de F, et on montre que la famille formée en réunissant les familles $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ est une base de $F+G$.

On arrive à l'égalité sur les dimensions en comptant les vecteurs de chaque famille.

Chapitre 4 : Applications linéaires

Définition et propriétés générales

Si E et F sont deux espaces vectoriels, une application de E vers F est linéaire si :

$\forall u, v \in E; \forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$
$$f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

Ces deux conditions peuvent être remplacées par :

$\forall u, v \in E; \forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$$

<u>Conséquences :</u>

- de proche en proche, on obtient : $f\left(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p\right) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \cdots + \alpha_p f\left(u_p\right)$
- $f(0_E) = 0_F$

Attention la réciproque est fausse :
si f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ est définie par $f\big((x,y)\big) = (x-y, x-y)$ alors
$f\big((1,1)\big) = (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}$ et $(1,1) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$

Exemples

- De $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$: $f\big((x_1, x_2, x_3)\big) = (3x_1 - 4x_2 + x_3, 0, x_2 + x_3)$
- De $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^4$:

  $$\boldsymbol{f\big((x_1, x_2)\big) = (3x_1 - 4x_2, 3x_1 - 4x_2, x_2 + x_1, 3x_1 - 4x_2)}$$
- De $\mathbb{R}^5$ vers $\mathbb{R}^2$:

  $$\boldsymbol{f\big((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\big) = (3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 7x_5, x_2 + x_3 - 3x_4 - 4x_5)}$$
- Les fonctions linéaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ (définies par $\boldsymbol{f(x) = ax}$) sont les applications linéaires de l’espace vectoriel $\mathbb{R}$ vers l’espace vectoriel $\mathbb{R}$

Propriétés générales

- En dimension finie, à la différences des fonctions usuelles, pour lesquelles on doit calculer l'image de chaque élèment pour définir totalement la fonction, une application linéaire est entièrement définie par les images des vecteurs d'une base E.

- Soit f une application linéaire de E (dimension p) vers F (dimension n), et $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ une base de E.
- Tout vecteur u de E peut alors s'écrire de façon unique $u = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_p b_p$ $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont donc les coordonnées de u dans $\mathcal{B})$
- On a alors $f(u) = \alpha_1 f(b_1) + \alpha_2 f(b_2) + \cdots + \alpha_p f(b_p)$
- Il suffit donc de connaitre les p vecteurs $f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_p)$ pour calculer directement l'image de n'importe quel vecteur de E.

Propriétés générales

- Attention $f(b_1), f(b_2), \ldots, f(b_p)$ ne forment pas (forcément) une base de F, ni même une famille libre :

pour f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par $f\big((x,y)\big) = (x-y, x-y)$, en prenant la ***base canonique*** de $\mathbb{R}^2, \mathcal{C} = \{c_1, c_2\} = \{(1,0), (0,1)\}$, on a $f(c_1) = (1,1)$ et $f(c_2) = (-1,-1) = -f(c_1)$

Image et surjectivité

L'image d'une application f de E vers F, noté $Im(f)$, est l'ensemble des images de tous les élèments de l'ensemble de depart :

$$Im(f) = \{f(x), x \in E\}$$

Attention à la terminologie : l'image d'une application est un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivé, l'image d'un élèment est un élèment de l'ensemble d'arrive. Il faut donc systématiquement verifier la nature de ce dont on parle.

Théorème : L'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel d'arrivé.

- **Démonstration** : E contient au moins 0_E et $f(0_E) = 0_F$, donc $Im(f)$ n'est pas vide

  Soient $y, y' \in Im(f)$ alors il existe x, x' dans E tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$ (par définition de l'image d'une application, qui ne content que des élèments images d'éléments de E).

On a alors $y + y' = f(x) + f(x') = f(x + x')$ car f est une application linéaire. Donc $y + y' \in Im(f)$ car c'est l'image d'un élèment de E qui est un espace vectoriel donc stable par l'addition.

Image et Surjectivité

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x)$ car f est une application linéaire.
Donc $\lambda y \in Im(f)$ car c'est l'image d'un élèment de E, qui est un espace-vectoriel donc stable par la multiplication externe.

$Im(f)$ est donc un sous-ensemble non vide, stable par l'addition et la multiplication externe de F, donc c'est **un sous-espace vectoriel de F**.

Théorème : si $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ est une base de E alors la famille $\{f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_p)\}$ est une famille génératrice de $Im(f)$.

Démonstration : Soit $y \in Im(f)$, alors il existe x dans E tel que $y = f(x)$.
$\mathcal{B}$ étant une base de E, x s'écrit (de façon unique) comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$

$$x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_p b_p$$

donc

$$y = f\left(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_p b_p\right) = \alpha_1 f(b_1) + \alpha_2 f(b_2) + \dots + \alpha_p f(b_p)$$

car f est linéaire.

Image et Surjectivité

Donc y s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $f(b_1), f(b_2), \ldots, f(b_p)$ qui forment donc une famille génératrice de $Im(f)$

donc :

$$Im(f) = Vect\left(f(b_1), f(b_2), \ldots, f(b_p)\right)$$

Attention :

Dans le cas général, il ne s'agit pas d'une famille libre, donc pas d'une base de $Im(f)$. On a donc : $\dim\left(Im(f)\right) \leq p$

Définition : on appelle rang de f, et on note $rg(f)$ le rang de la famille $\{f(b_1), f(b_2), \ldots, f(b_p)\}$, c'est-à-dire la dimension de $Im(f)$.

Ce nombre est à priori différent de p et de n qui sont les dimensions des espaces vectoriels E et F de départ et d'arrivée de f:

Soit f : $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$f\left((x, y, z)\right) = (x + y + z, x + y + z, x - y - z, x - y - z)$$

Image et surjectivité

En prenant la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ on a :

- $f(c_1) = (1,1,1,1)$
- $f(c_2) = (1,1,-1,-1)$
- $f(c_3) = (1,1,-1,-1)$

Donc $Im(f) = Vect((1,1,1,1),(1,1,-1,-1))$, et f est donc de rang 2

RAPPEL : Une application (linéaire ou non) est surjective si et seulement si tout élément de F (l'ensemble d'arrivée) possède au moins un antécédent par f, c'est-à-dire :

$$\forall y \in F; \exists x \in E, y = f(x)$$

Cette définition n'utilise que l'existence, il peut donc y avoir plusieurs antécédents pour un même élèment y.

Image et surjectivité

Propriété : Une application linéaire est surjective si son rang est égal à n, la dimension de l'espace vectoriel d'arrivée.

Démonstration : si $rg(f) = n$, alors $\dim(Im(f)) = n$, or le seul espace vectoriel de dimension n est F lui-méme. Donc $F = Im(f)$, donc tout élément de F admet un antécédent par f, donc f est surjective.

Conséquence 1 : l'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est génératrice.

Démonstration : soit $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_p\}$ une famille génératrice de E, et $y \in F$. f étant surjective, y admet un antécédent x. Comme $\mathcal{G}$ est génératrice de E, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ tels que $x = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_p g_p$, donc :

$$y = f(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_q g_q)$$

Soit

$$\mathcal{G} = \lambda_1 f(g_1) + \lambda_2 f(g_2) + \cdots + \lambda_p f(g_p)$$

Car f est linéaire. Donc les vecteurs $f(g_1), f(g_2)$, ... forment bien une famille génératrice de F

Image et surjectivité

Conséquence 2 : Comme $rg(f) \leq p$, f ne peut pas être surjective si $n > p$.

ATTENTION : on peut avoir $n \leq p$ et f non surjective.
Par exemple pour $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f\big((x, y, z)\big) = (x + y + z, x + y + z)$$

On a alors :

$$f(c_1) = f(c_2) = f(c_3)$$

donc $rg(f) = 1$, f n'est pas donc surjective.

Noyau et Injectivité

<u>Définition</u> : Soit f une application linéaire de E vers F. On appelle noyau de f et on note $Ker(f)$l'ensemble des antécédents de 0_F, c'est-à-dire :

$$Ker(f) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}$$

Attention : $Ker(f)$ est un sous-ensemble de E, l'espace vectoriel de départ de f

<u>Propriété</u> : $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E

<u>Démonstration</u> : - on a vu que $f(0_E) = 0_F$, donc $Ker(f)$ n'est pas vide car il contient toujours au moins 0_E

- Soient $x, x' \in Ker(f)$, alors $f(x) = 0_F$ et $f(x') = 0_F$, on a alors :
$f(x) + f(x') = 0_F$, donc $f(x + x') = 0_F$ car f est linéaire. Donc : $x + x' \in Ker(f)$

- Soit $x \in Ker(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f(x) = \lambda 0_F = 0_F$. Comme f est linéaire :
$\lambda f(x) = f(\lambda x)$; donc $f(\lambda x) = 0_F$, donc $\lambda x \in Ker(f)$

➔ Donc $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E

Noyau et injectivité

RAPPEL : Une application est injective si et seulement si tout élément de F (ensemble d'arrivée) possède au plus un antécédent par f, ou encore si deux éléments différents de E (ensemble de départ) ont nécessairement des images différentes.

Contre-exemple : la fonction f $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas injective. Par exemple 4 admet deux antécédents par f: 2 et -2

Propriété : Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit à 0_E, c'est-à-dire, si et seulement si $Ker(f) = \{0_E\}$.

On a donc une propriété plus facile à démontrer que dans le cas général, puisqu'il suffit de montrer qu'un seul élément de $F(0_F)$ ne possède qu'un seul antécédent, et non pas de le montrer pour tous les élèments de F,

Noyau et injectivité

Démonstration : Si f est injective, alors 0_F (comme tous les élèments de F) admet au plus un antécédent. Or 0_Fadmet au moins 0_E comme antécédent, donc c'est le seul. Donc $Ker(f) = \{0_E\}$

Supposons que $Ker(f) = \{0_E\}$. Pour montrer que f est injective, prenons deux élèments x et x' tel que $f(x) = f(x')$. On a alors :

$$f(x') - f(x) = 0_F$$

Soit

$$f(x' - x) = 0_F$$

Car f est linéaire donc $x - x'$ est un antécédent de 0_F. Or par hypothèse 0_E est le seul antécédent de 0_F, donc $x - x' = 0_E$, donc $x = x'$. Donc f est injective.

Noyau et injectivité

Conséquence 1 : les mages par une application injective des vecteurs d'une famille libre forment une famille libre.

Démonstration : soit $u_1, u_2, \dots, u_q$ une famille libre de vecteurs de E.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ tels que :

$$\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \cdots + \lambda_q f(u_q) = 0_F$$

Comme f est linéaire, il vient :

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_q u_q) = 0_F$$

mais comme f est injective, le seul antécédent de 0_F est 0_E, donc :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_q u_q = 0_E$$

mais la famille $u_1, u_2, \dots, u_q$ étant libre, on a nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 \dots = 0$

donc la famille $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_q)$ est libre également.

Noyau et injectivité

Conséquence 2 : si f est injective alors nécessairement $p \leq n$ (la dimension de E est inférieure ou égale à celle de F) : En effet une base de E est une famille libre de p vecteurs, et une famille libre de F ne peut pas contenir plus de n vecteurs, il faut donc nécessairement que $n \geq p$

Les bijections

RAPPEL : Une application est **bijective** si elle est à la fois surjective et injective, donc si tout élément de F possède un et un seul antécédent par f.

Une application linéaire bijective s'appelle un isomorphisme (ce qui veut dire « même forme » en grec). Si il existe un isomorphisme entre deux espaces vectoriels de E et F, alors $\dim(E) = \dim(F)$ [*reprendre les 2 inégalités obtenues pour injective et surjective, elles mènent à l'égalité*]

Théorème du rang :

Si f est une application linéaire de E (de dimension p) et F (de dimension n) alors on a :

$$\dim(Ker(f)) + \dim\big(Im(f)\big) = \dim(E)$$

Ou

$$\dim\big(Ker(f)\big) + rg(f) = \dim(E)$$

Autrement dit, les dimensions de l'espace vectoriel de départ E sont réparties entre le noyau de f (dont les images valent 0_F) et des vecteurs non nuls dont les images non nulles se trouvent dans $Im(f)$

Corollaire

Si on définit $\tilde{f}$ comme la restriction de f à un sous-espace vectoriel.
H supplémentaire de $Ker(f)$(c'est-à-dire qu'on ne considère que les images par f des éléments de H), alors $\tilde{f}$ est un isomorphisme de H vers $Im(f)$.

Aix*Marseille université
Socialement engagée

Annexe A: determination pratique du rang d’une famille de vecteurs

Contexte

En pratique, la determination du range d'une famille de vecteurs peut amener des calculs longs, en particulier si certains ne sont combinaison linéaire que de quelques uns, et/ou si il y a beaucoup de vecteurs et dans des espaces de dimension élevée.

Heureusement l'utilisation des matrices et de **l'algorithme de Gauss** permet non seulement d'avoir une méthode de calcul rapide, fiable et systématique, et qui permet d'extraire une famille libre (qui forme donc une base du s.e.v. engendré), ainsi que les différentes combinaisons linéaires reliant éventuellement les vecteurs entre eux.

Contexte

Cette méthode est basée sur les postulats (faciles à vérifier) suivants :

- À partir d'une famille de vecteurs exprimés dans une base choisie, on peut former une matrice en placant les coordonnées de ces vecteurs en ligne (ou en colonne, on verra que dans certains cas c'est préférable).
- L'application de l'algorithme de Gauss aux lignes (ou aux colonnes) de cette matrice revient à faire des combinaisons linéaires des vecteurs de départ
- Si une ligne (ou une colonne) est nulle à la fin du calcul c'est que le vecteur correspondant à cette ligne est une combinaison linéaire des précédents (ceux correspondants aux lignes ou aux colonnes d'indice inférieur)

Contexte

- Réciproquement les lignes (colonnes) non nulles correspondent à des vecteurs qui sont indépendants les uns des autres.
- La famille formée par ces lignes (colonnes) non nulles forment une matrice triangulaire (supérieure si on a travaillé sur les lignes, inferieure avec les colonnes) qui indique qu'on a obtenu une famille libre.
- Les vecteurs don't l'indice correspondent à ces lignes/colonnes forment donc une famille libre extraite de la famille de départ. Il en est de même pour les vecteurs obtenus à la fin du calcul, qui sont des combinaisons linéaires de cette famille extraite, en ayant l'avantage de former une famille plus simple à utiliser par exemple pour calculer les coordonnées d'un vecteur
- Si on garde la trace des opérations effectuées au cours des calculs on peut exprimer les vecteurs liées (ceux qui ont donné des lignes/colonnes nulles) en fonction des autres.

Exemple

Soit la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^5$ suivante :

- $u_1 = (1,1,-1,2,0)$
- $u_2 = (2,-1,3,0,1)$
- $u_3 = (4,1,1,4,1)$
- $u_4 = (1,-1,0,2,2)$
- $u_5 = (2,0,-1,4,2)$

On peut alors former la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Example

L’objectif est de réussir à obtenir des lignes seulement composées de 0.

On peut par exemple effectuer les susbstitutions suivantes en utilisant d’abord la 1ere ligne:

- $L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1$
- $L_3 \rightarrow L_3 - 4L_1$
- $L_4 \rightarrow L_4 - L_1$
- $L_5 \rightarrow L_5 - 2L_1$

On obtient alors la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Example

On peut continuer et effectuer les susbstitutions suivantes en utilisant la 2e ligne:

- $L_3 \rightarrow L_3 - L_2$
- $L_4 \rightarrow L_4 - \frac{2}{3}L_2$
- $L_5 \rightarrow L_5 - \frac{2}{3}L_2$

On obtient alors la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Example

La 3e ligne étant déjà à 0, on ne peut plus l'utiliser pour faire des substitutions, on passe à la 4e ligne, et on peut faire

- $L_5 \to L_5 - L_4$

On obtient alors la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Example

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit depuis cette matrice que la famille initiale est de rang 3.

On voit que u_3 est une combinaison linéaire de u_2 et u_1 (on a effectué les substitutions suivantes pour obtenir le vecteur nul : $L_3 \to L_3 - 4L_1$ puis $L_3 \to L_3 - L_2$) donc :

$$u_3 - 4u_1 - u_2 = 0$$

Même chose pour u_5 qui est une combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_4 u_1 (on a effectué les substitutions suivantes pour obtenir le vecteur nul :$L'_5 \to L_5 - 2L_1$ puis $L''_5 \to L'_5 - \frac{2}{3}L'_2$ et $L'''_5 \to L''_5 - L''_4$) avec $L'_2 \to L_2 - 2L_1$ et $L''_4 \to L'_4 - \frac{2}{3}L'_2$ et $L'_4 \to L_4 - L_1$ donc :

$$u_5 - 2u_1 - \frac{2}{3}(u_2 - 2u_1) - (u_4 - u_1 - \frac{2}{3}(\mathrm{u}_2 - 2\mathrm{u}_1) = 0$$

$$u_5 - 2u_1 - \frac{2}{3}u_2 + \frac{4}{3}u_1 - u_4 + u_1 + \frac{2}{3}u_2 - \frac{4}{3}u_1 = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{u_5 - u_4 - u_1 = 0}}$$