Portail Curie 2023-2024 — Aix–Marseille Université

Mathématiques pour Physique et SPI

PARTIEL DU 8 AVRIL 2024

NI DOCUMENT NI CALCULETTE

(*) = *On justifiera chaque réponse, soit par une preuve si oui, soit par un contre-exemple.*

Questions de cours

Soit E un espace vectoriel réel ("$\mathbb{R}$-e.v.") d'élément neutre 0_E pour l'addition "$+$" sur les vecteurs de E.

1. Soit un sous-ensemble $F \subset E$. Quelle est la définition que F soit un sous-espace vectoriel ("s.e.v.") de E ?
2. Soient F et G deux s.e.v. de E.
   (a) Peut-on affirmer que $F \cap G$ est un s.e.v. de E ? (*)
   (b) Peut-on affirmer que $F \cup G$ est un s.e.v. de E ? (*)
   (c) Rappeler la définition de $F + G$. Que peut-on en dire (en moins de 10 mots) ?
3. Quelle est la définition qu'une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de n (n entier, $n \geq 1$) vecteurs de E soit libre ?

Exercices (Les trois exercices suivants sont indépendants.)

1) Parmi les ensembles suivants, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$: (*)

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y=1\}\,; \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x \leq y\}\,; \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy=0\}\,; \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2,\ 4x-3y=0\}\,. \end{aligned}$$

2) Soient les vecteurs $u = (1,0,2)$ et $v = (1,-2,0)$ de $\mathbb{R}^3$.

(i) Montrer que la famille (u,v) est libre.

(ii) Donner une équation cartésienne du plan vectoriel $P = \mathrm{Vect}(u,v)$ engendré par u et v.

(iii) Soit $q := (-1,12,10)$. En utilisant la question (ii), démontrer : $q \in P$. Déterminer les coordonnées de q dans la base (u,v) de P.

(iv) Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$ tel que (u,v,w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.

3) Soient quatre vecteurs $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}^3$.

1. Peut-on affirmer que la famille $\mathcal{F} := (u_1,u_2,u_3,u_4)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$? Justifier la réponse.
2. Peut-on affirmer que cette famille $\mathcal{F}$ est liée ? Justifier la réponse.
3. On suppose qu'on a la relation (R) : $u_1 + 2u_2 + 4u_4 = 0$. Comparer les sous-espaces $G := \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$ et $F := \mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$.
4. On suppose qu'on a encore la relation (R) et, en plus, que la famille $\mathcal{B} := (u_1,u_2,u_3)$ est libre. Peut-on affirmer que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$? (Justifier.) Si oui, déterminer les coordonnées des vecteurs u_i, $1 \leq i \leq 4$ dans cette base.

4) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \subset \mathbb{R}^3$ avec $\mathcal{F} = (u_1,u_2,u_3)$ et $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (1,3,4)$, $u_3 = (1,4,5)$. De plus, on déterminera, si elle existe, une relation linéaire non triviale entre les u_i.